

Optimisation stochastique - 1

Le recuit simulé



Optimisation stochastique

GREETINGS,
WALLY FOLLOWERS!
WOW, THE BEACH WAS
GREAT TODAY! I SAW
THIS GIRL STICK AN
ICE-CREAM IN HER
BROTHER'S FACE, AND
THERE WAS A SAND-
CASTLE WITH A REAL
KNIGHT IN ARMOUR
INSIDE! FANTASTIC!

Wally



TO:
WALLY FOLLOWERS,
HERE, THERE,
EVERYWHERE.

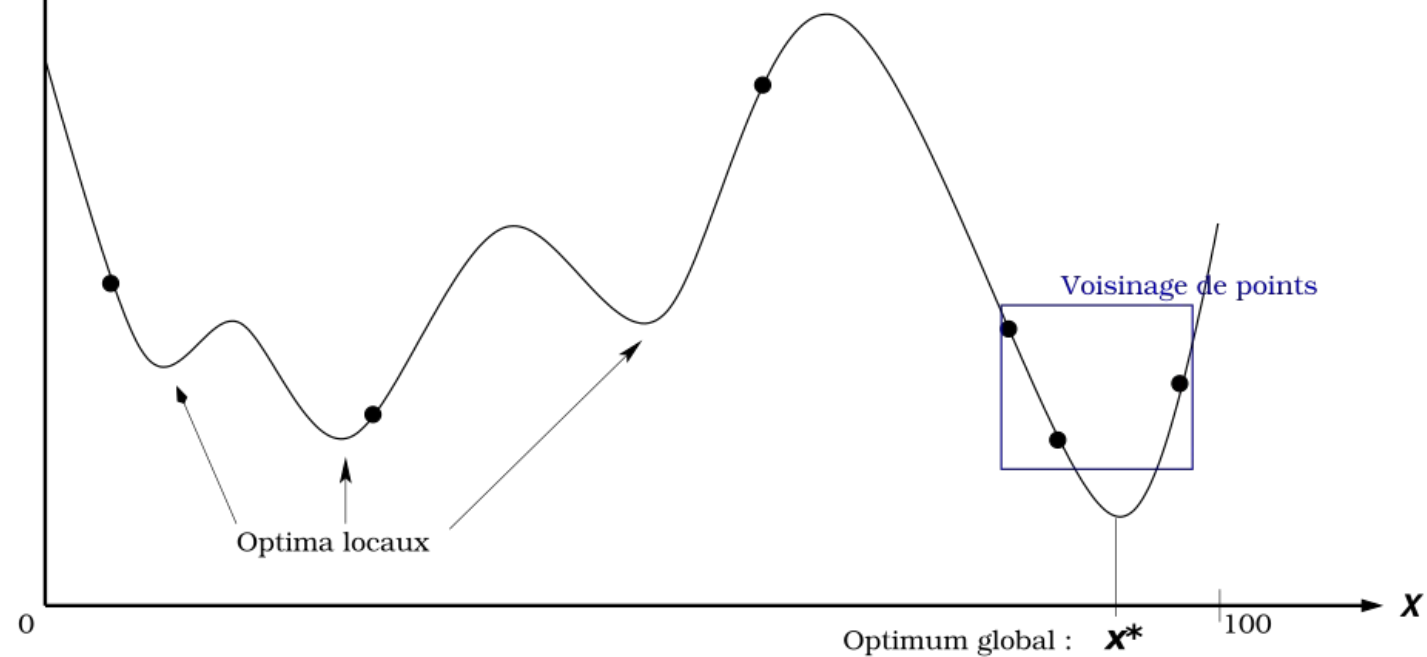


Optimisation

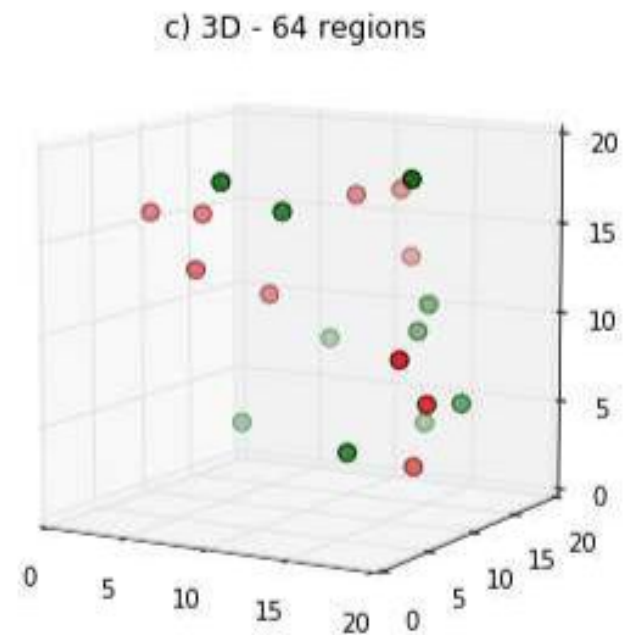
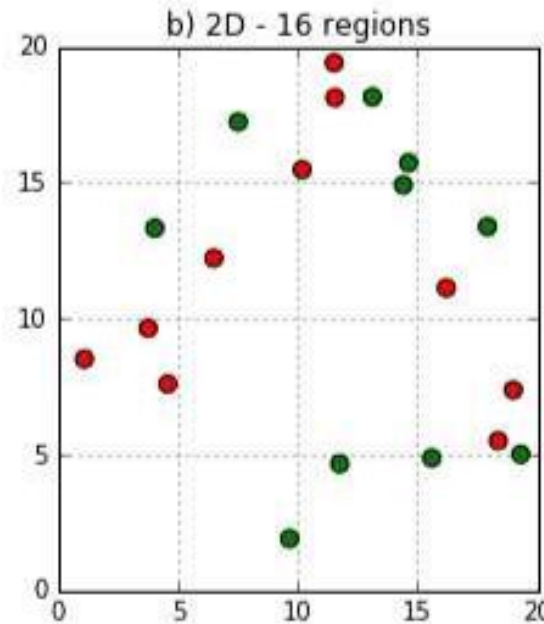
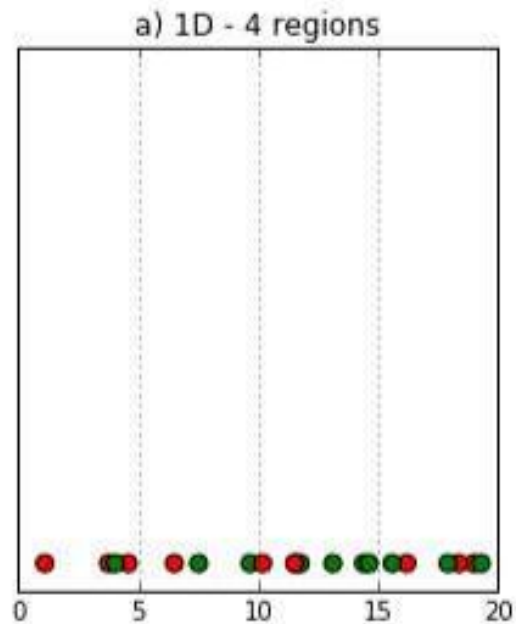


$f(X)$

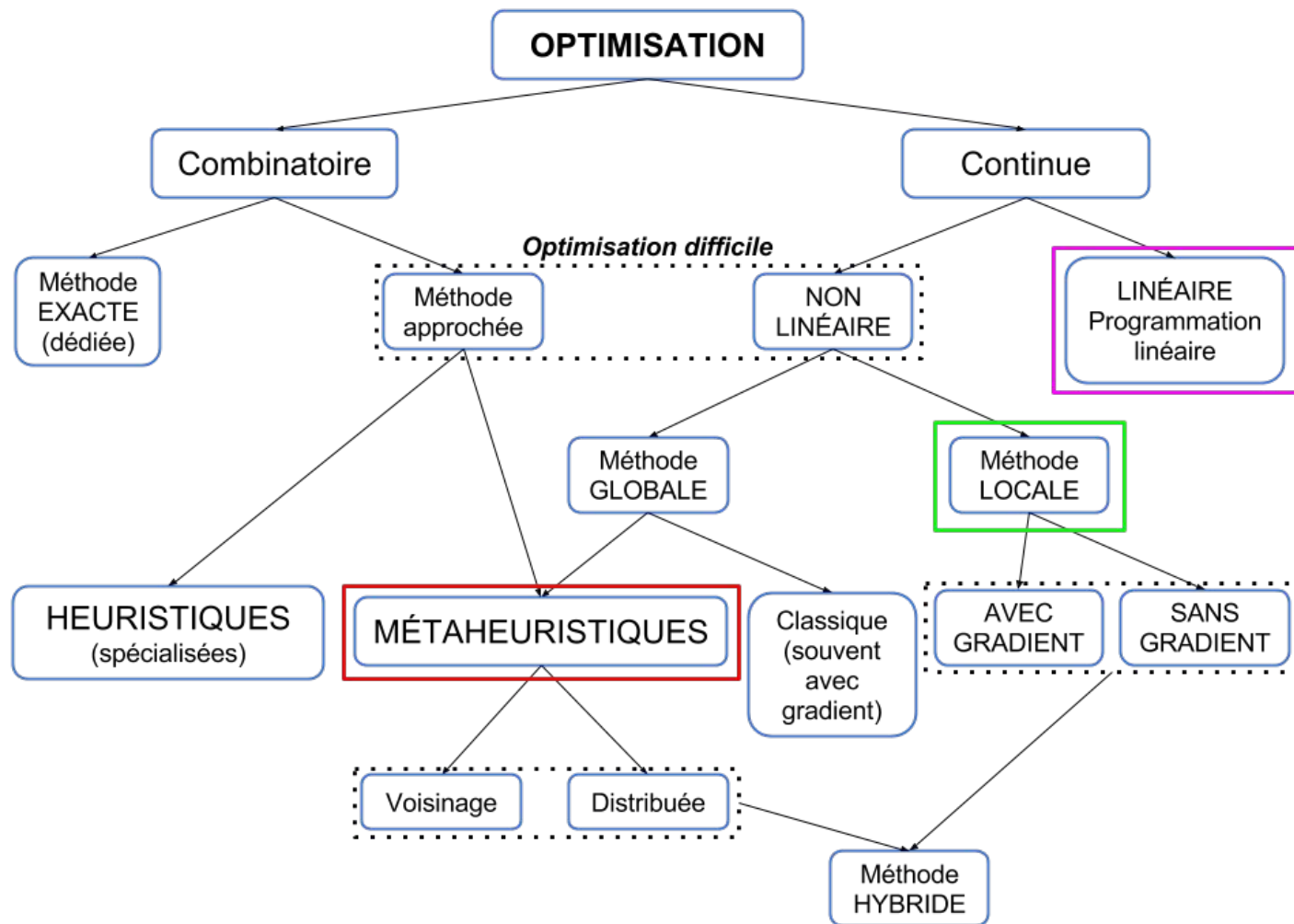
Optimisation



La malédiction de la dimension



<http://cleverowl.uk/2016/02/06/curse-of-dimensionality-explained/>

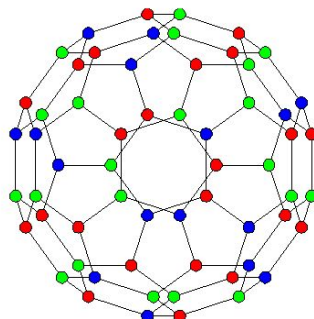


Typologie de problèmes

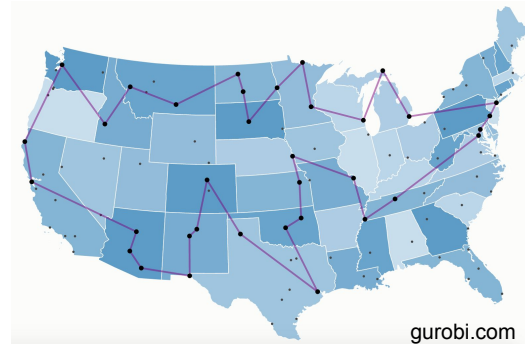
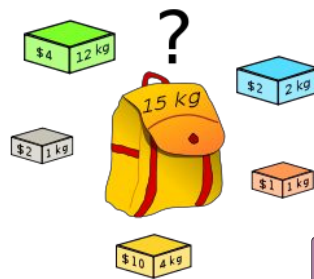
- Optimisation difficile;
- Problème de minimisation / maximisation;
- Problèmes mono-objectif, multi-objectifs, “many”-objectifs;
- Problèmes à variables discrètes / continues / mixtes;
- Problèmes sous contraintes;
- Problèmes à grande dimension;
- Problèmes dynamiques.

Typologie de problèmes à variables discrètes

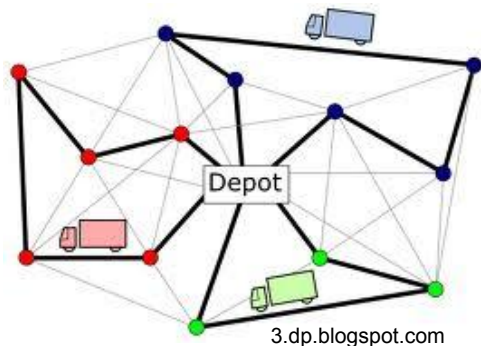
- Voyageur de commerce
- Tournée de véhicules
- Coloration de graphe
- Sac à dos
- Planification...



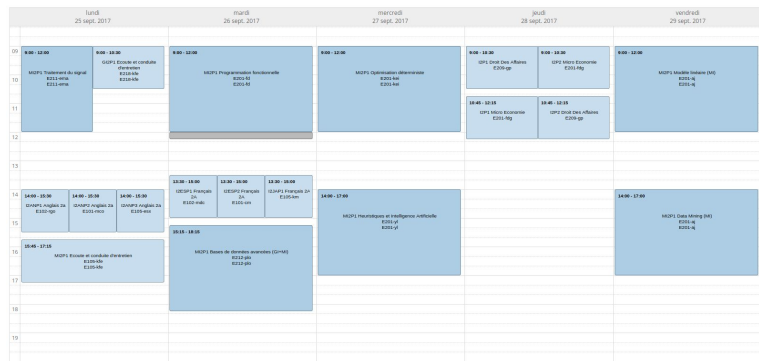
mathworks.com



gurobi.com

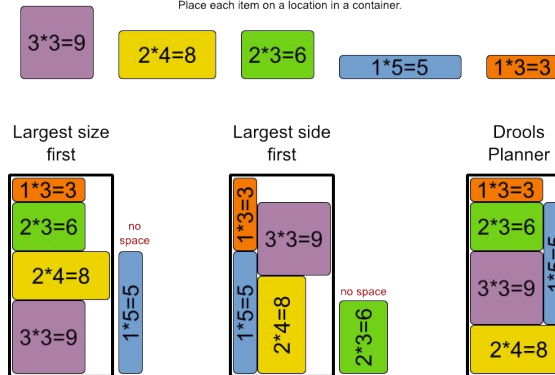


3.dp.blogspot.com



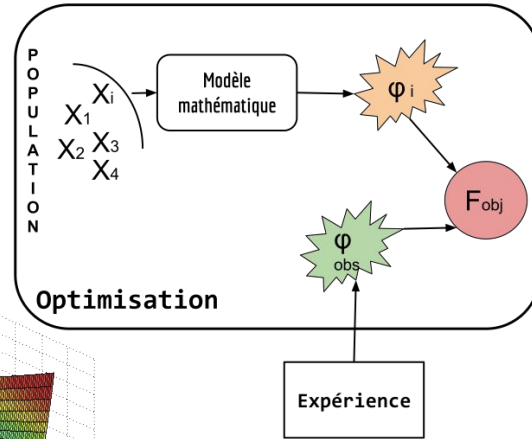
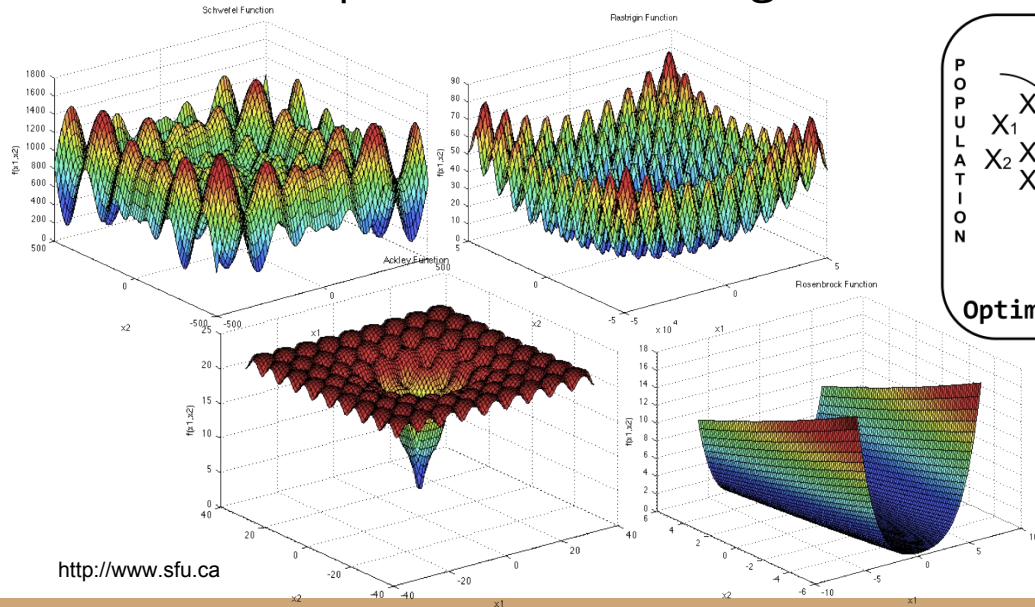
Bin packing

Place each item on a location in a container.



Typologie de problèmes à variables continues

- Fonction analytique (benchmarks) ;
- Expression non analytique (code de calcul, problème inverse) ;
- Autres problèmes variés (géométrie, chimie, physique)...

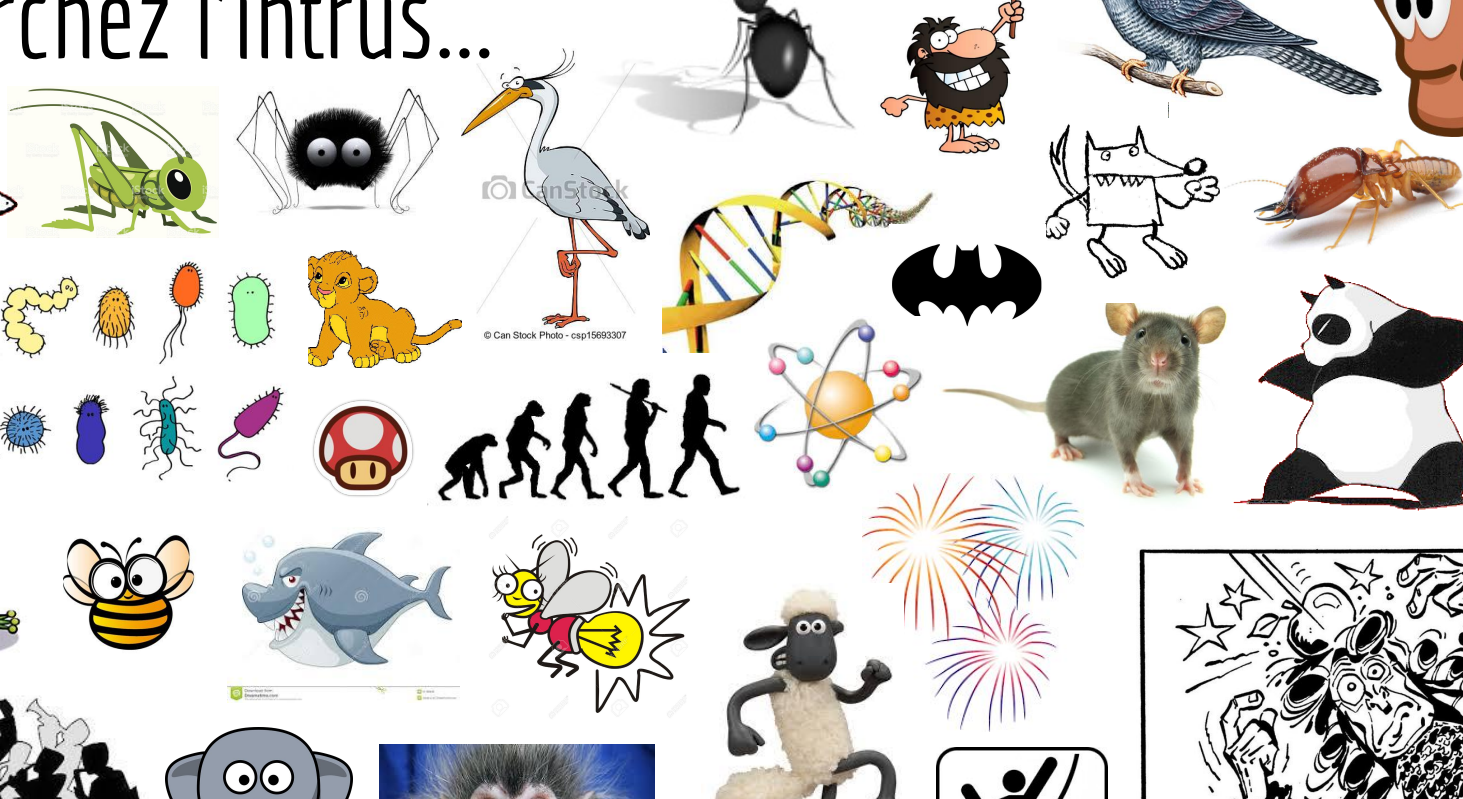


Métaheuristiques

Ce sont des méthodes :

- globales;
- stochastiques;
- génériques même si dépendantes du contexte continu/discret;
- qui ne garantissent pas l'optimalité;
- basées sur des analogies avec la biologie, la physique, l'éthologie...

Cherchez l'intrus...



The collage contains the following items:

- Text: "Cherchez l'intrus..."
- Animals: fish, grasshopper, spider, stork, ant, cartoon cavewoman, pigeon, cartoon worm, cat, centipede, cartoon frog, bacteria, lion, DNA helix, bat symbol, cartoon wolf, beetle, mole, mouse, panda, whale, shark, bee, sheep, monkey, elephant, and a group of people.
- Objects: a red mushroom, a lightbulb, a bomb, fireworks, and a cartoon character with a large head.
- Other: a black silhouette of a person running, a black silhouette of a person with a large head, and a black silhouette of a person with a large head.



[illegible]

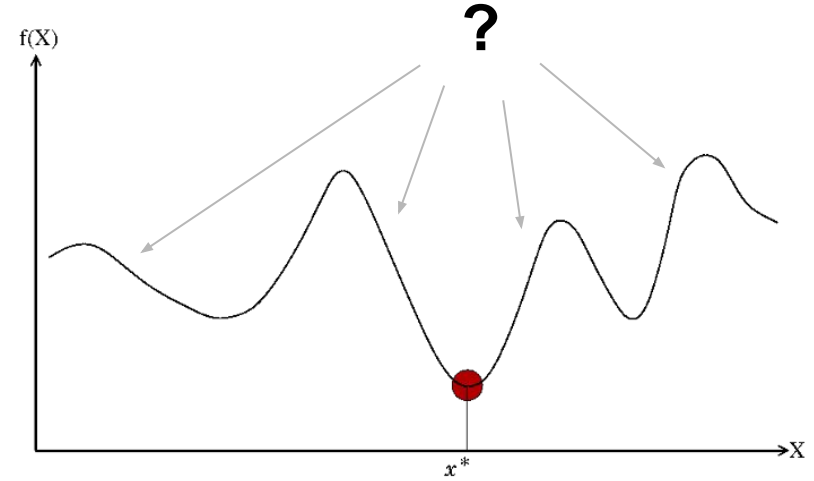
Éléments constitutifs et stratégies

Elles sont généralement composées de :

- Une ou plusieurs (population) solutions initiales;
- Une stratégie de génération de nouvelle solution basée sur l'aléatoire;
- Un critère d'acceptation d'une nouvelle solution;
- Des coefficients de contrôle de comportement de l'algorithme;
- Le partage d'information, l'utilisation d'une mémoire de solutions explorées;
- Un critère de convergence.

Initialisation

- Aléatoirement
- Manière intelligente
 - sampling
 - hypercubes latins
 - séquence de Halton
 - ...



Recherche

Exploration

VS

Exploitation



Voisinage

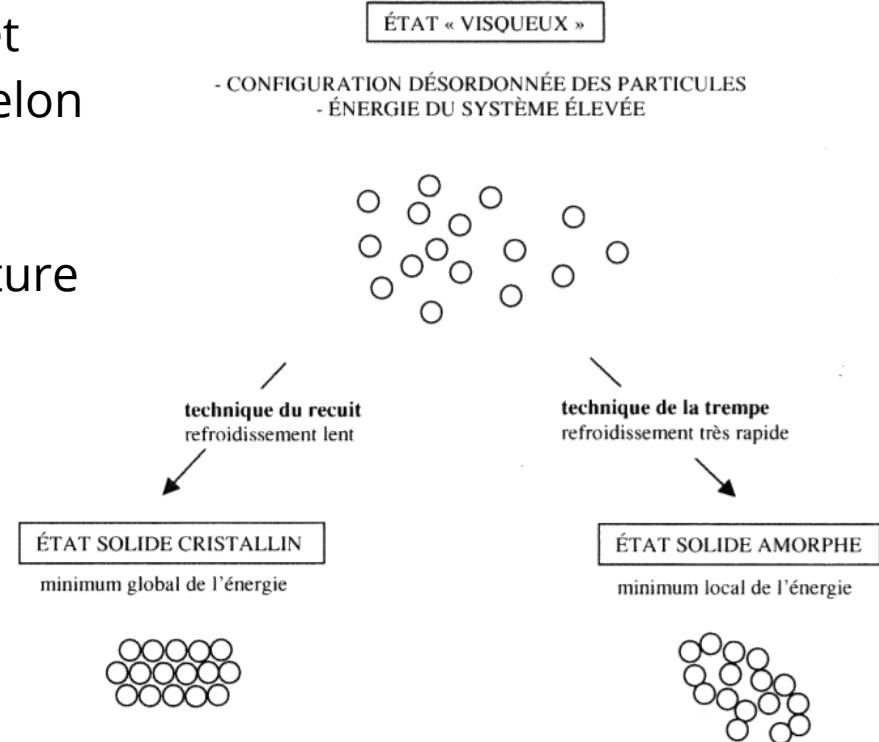
- Définition :
 - Cas des variables discrètes : décalage de composantes de la données,
 - Cas des variables continues : hyper(sphère | cube) centré autour de la donnée.
- Stratégies
 - Voisinage géographique,
 - Voisinage social,
 - Voisinage aléatoire.
- Méthodes du gradient, Newton-Raphson, dichotomie, polytope de Nelder-Mead...
- Hybridation avec des méthodes de recherche locales

Le recuit simulé

Pour l'histoire... un peu de physique !

Le recuit est une technique qui permet d'améliorer la qualité d'un matériau selon la méthode suivante :

- On le porte à très haute température pour le liquéfier
- On abaisse progressivement la température pour stabiliser la structure du matériau



Le recuit simulé (Simulated Annealing)

- Métaheuristique variante de l'algorithme de Metropolis-Hastings (voir exemple [ici](#)) ;
- Proposée en 83 par Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi et en 85 par Cerny;
- Première métaheuristique proposée;
- Adaptée aux problèmes discrets (originellement au placement de composant électronique sur une plaque).

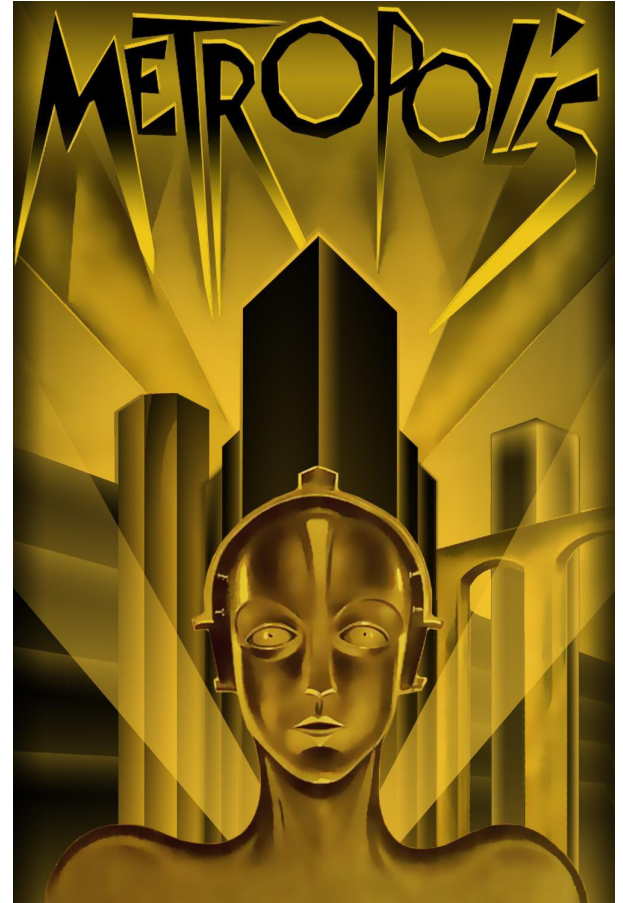
Le recuit simulé - l'analogie

- La fonction f à minimiser est l'énergie du système;
- Une solution X représente un état du matériau;
- L'équilibre thermodynamique est atteint lors d'un palier de température;
- À température T , une perturbation de la solution courante est acceptée avec de manière probabiliste basée sur le critère de Metropolis.

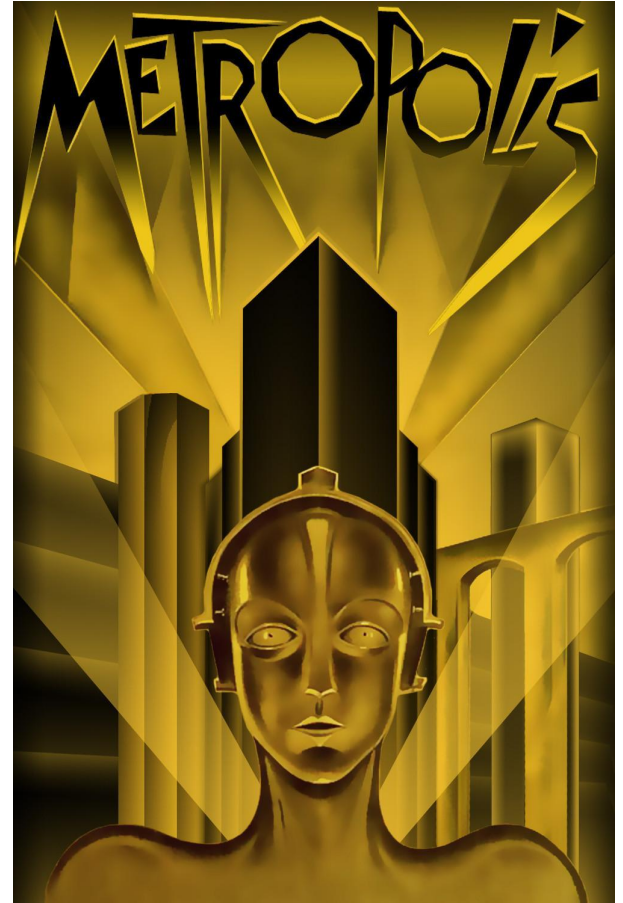
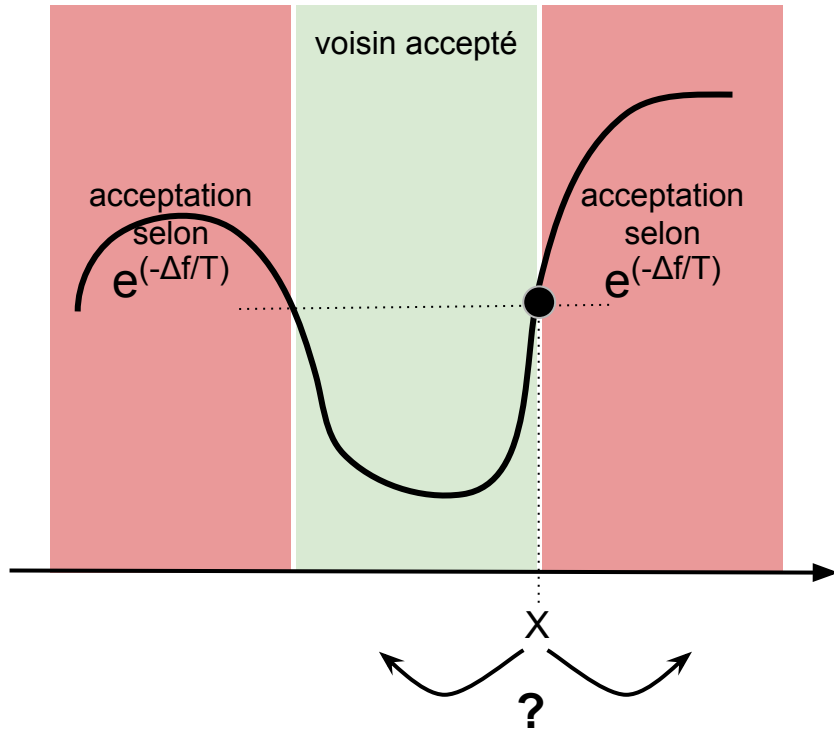
Critère de

```
critereMetropolis( $\Delta f, T$ ) :  
  Si  $\Delta f \leq 0$  alors  
    retourner VRAI  
  sinon  
    retourner  $\text{aléa}(0,1) < e^{(-\Delta f/T)}$ 
```

- $\Delta f \leq 0$, le voisin est accepté;
- Une petite variation a plus de chance d'être acceptée qu'une importante;
- Cette fonction est **stochastique**.



Critère de



Algorithme du recuit simulé

```
X, une solution, f(X) énergie du système, T Température initiale
fmin <- f(X)
Xmin <- X
Tant que T > Tmin ou non critèreConvergence()
    Tant que non équilibreThermodynamique() // palier de température
        Xvois <- perturbation(X)
        Δf = f(Xvois) - f(X)
        Si Δf < 0 ou acceptationCritèreMétropolis(Δf,T) alors
            Si Δf < 0 et f(Xvois) < fmin alors
                fmin <- f(Xvois)
                Xmin <- Xvois
            Fin si
            f(X) <- f(Xvois)
            X <- Xvois
        Fin si
    Fin tant que
    T <- refroidissement(T)
Fin tant que
```

Recuit simulé : Critères de convergence

Permet de terminer l'algorithme selon plusieurs conditions :

- La température atteint une valeur minimale;
- Le nombre d'évaluations atteint une limite;
- Il n'y a pas eu d'amélioration depuis un certain nombre d'itérations.

Recuit simulé : Équilibre thermodynamique

Permet de “fouiller” autour d’une bonne solution en cours :

- Le nombre d’évaluations atteint une limite;
- Il n’y a pas eu d’amélioration depuis un certain nombre d’itérations.

Recuit simulé : Refroidissement

Permet de diminuer la probabilité d'acceptation d'une solution non améliorante selon le critère de Métropolis :

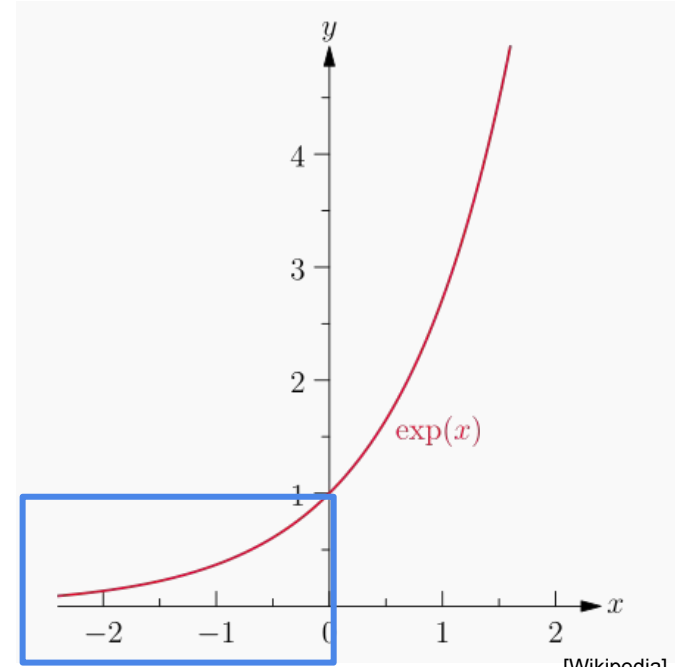
- Une forte décroissance empêche une exploration convenable, l'algorithme converge rapidement vers un minimum local;
- Une faible décroissance permet une forte exploration lors des premières itérations de l'algorithme et rend peu probable la sélection d'une solution dégradante;
- À $T=0$, aucune solution dégradante n'est sélectionnée; à $T=\infty$, toute solution est acceptée.

Recuit simulé : Refroidissement

- À haute température, la valeur du critère de Métropolis est proche de 1, la plupart des solutions dégradantes sont acceptées :



- À faible température, la valeur du critère de Métropolis tend vers 0, la plupart des solutions dégradantes sont rejetées :



Espace de variation du
critère de Métropolis

[Wikipedia]

Recuit simulé : Refroidissement

Différents schémas de réduction de la température :

- Géométrique (si l'on ne considère pas les paliers...) : $T_{k+1} = \alpha.T_k$, le plus couramment utilisé;
- Logarithmique : $T_k = \mu / \log(1+k)$, où k : nb de paliers et μ une constante.
Très coûteux en temps de calcul, peu utilisée;
- Exponentiel : $T_k = T_0.\exp(-k/\tau)$, où k : nb de paliers et τ une constante;
- Ésotérique : on peut remonter la température selon un critère particulier.

Recuit simulé : Perturbation

- Génère une nouvelle solution au **voisinage** de la solution en cours;
- Influence de la distance entre ces deux solutions (hypervolume du voisinage);
- Spécifique au problème à résoudre (discret/continu).

No free lunch theorem [Wolpert and Macready]

Des restaurants (méthodes de résolution) possèdent un menu proposant des plats (problèmes) à différents prix (performance de résolution). Chaque restaurant propose les même plats mais à des prix différents.

Il n'existe pas de menu parfait pour un omnivore.

Un exemple d'application...





That's all folks !